第 4 节 同构（★★★★）

内容提要

在某些方程、不等式问题中，可以通过等价变形，使方程、不等式左右两端结构一致，进而构造函数来解决问题，这类解题方法一般叫做同构. 同构常出现在小题与大题压轴位置，是较难掌握的方法，需要敏锐的观察能力和一定的解题经验才能灵活运用，下面为大家归纳几类常见的同构题型.

1．以例 1 及其后的变式为代表的不同变量在两边，简单变形即可同构；或者分别给出关于两个变量的等式，通过换元、变形将一个等式化为与另一等式同构；又或者将含参的和不含参的分离到不等号两侧，简单变形即可同构.

2. 以例 2 为代表的利用恒等式 $x=\mathrm{e}^{\ln x}(x>0)$ 将指数部分调整为与所给不等式其余含 x 的部分一致的结构，整体换元简化不等式的同构.

3．以例 3 及其变式为代表的指对共生式同构：（以下底数 e 也可换成其它底数，类似处理即可）

①$m(x)=\mathrm{e}^x\pm x$ 与 $n(x)=x\pm\ln x$ 的同构：$m(x)=\mathrm{e}^x\pm x=\mathrm{e}^x\pm\ln\mathrm{e}^x=n(\mathrm{e}^x)$，$n(x)=x\pm\ln x=\mathrm{e}^{\ln x}\pm\ln x=m(\ln x)$，所以这两个结构可以相互转化.

② $f(x)=x\mathrm{e}^x$ 与 $g(x)=x\ln x$ 的同构：$f(x)=x\mathrm{e}^x=\mathrm{e}^x\cdot\ln\mathrm{e}^x=g(\mathrm{e}^x)$，$g(x)=x\ln x=\mathrm{e}^{\ln x}\cdot\ln x=f(\ln x)$，所以这两个结构可以相互转化.

③$u(x)=\dfrac{\mathrm{e}^x}{x}$ 与 $v(x)=\dfrac{x}{\ln x}$ 的同构：$u(x)=\dfrac{\mathrm{e}^x}{x}=\dfrac{\mathrm{e}^x}{\ln\mathrm{e}^x}=v(\mathrm{e}^x)$，$v(x)=\dfrac{x}{\ln x}=\dfrac{\mathrm{e}^{\ln x}}{\ln x}=u(\ln x)$，所以这两个结构可以相互转化.

《一数•高考数学核心方法》

典型例题

类型Ⅰ：简单变形化同构

【例 1】已知正实数 a，b 满足 $\dfrac{8}{(b+1)^3}+\dfrac{10}{b+1}\le a^3+5a$，则 $ab+a$ 的最小值是_____.

解析：已知的不等式中，左侧只含 b，右侧只含 a，变量已隔离开，观察发现两侧可调整为同构形式，

$\dfrac{8}{(b+1)^3}+\dfrac{10}{b+1}\le a^3+5a\Leftrightarrow(\dfrac{2}{b+1})^3+5\cdot\dfrac{2}{b+1}\le a^3+5a$ ①，这样左右两侧结构就一致了，可构造函数分析，

设 $f(x)=x^3+5x(x\in\mathbf{R})$，则 $f'(x)=3x^2+5>0$，所以 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上↗，

而不等式①即为 $f(\dfrac{2}{b+1})\le f(a)$，所以 $\dfrac{2}{b+1}\le a$，又 a，b 均为正实数，所以 $b+1>0$，故 $a(b+1)\ge 2$，

即 $ab+a\ge 2$，所以 $ab+a$ 的最小值为 2.

答案：2

【反思】①对不好研究，但形式相近的不等式，一般会先思考能否变为同构形式；②本题原题其实是求 $a+b$ 的最小值，你会做吗？可在 $a(b+1)\ge 2$ 的基础上，进一步得出 $a+b=a+(b+1)-1\ge 2\sqrt{a(b+1)}-1\ge 2\sqrt{2}-1$，并验证取等条件，求得 $a+b$ 的最小值为 $2\sqrt{2}-1$.

【变式 1】已知实数 a，b 满足 $a=\mathrm{e}^{5-a}$，$2+\ln b=\mathrm{e}^{3-\ln b}$，则 $ab=$_____.

解析：所给的两个等式都无法直接求出 a 和 b，但形式相近，故考虑同构，其中 $a=\mathrm{e}^{5-a}$ 这个式子已经很简单了，所以将 $2+\ln b=\mathrm{e}^{3-\ln b}$ 朝 $a=\mathrm{e}^{5-a}$ 变形，对比此两式发现可将 $2+\ln b$ 整体换元成 t，

令 $2+\ln b=t$，则 $\ln b=t-2$，代入 $2+\ln b=\mathrm{e}^{3-\ln b}$ 可得 $t=\mathrm{e}^{5-t}$，这就与 $a=\mathrm{e}^{5-a}$ 同构了，可构造函数分析，

设 $f(x)=x-\mathrm{e}^{5-x}(x\in\mathbf{R})$，则 $\begin{cases}f(a)=a-\mathrm{e}^{5-a}=0\\ f(t)=t-\mathrm{e}^{5-t}=0\end{cases}$，所以 a 和 t 都是 $f(x)$ 的零点，

又 $f'(x)=1+\mathrm{e}^{5-x}>0$，所以 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上↗，从而 $a=t$，故 $a=2+\ln b$ ①，

要想求出 ab，光靠式①不够，可结合已知的等式 $2+\ln b=\mathrm{e}^{3-\ln b}$，因为该式的左边就是 $2+\ln b$，

将 $a=2+\ln b$ 代入 $2+\ln b=\mathrm{e}^{3-\ln b}$ 左侧可得 $a=\mathrm{e}^{3-\ln b}$，所以 $a=\dfrac{\mathrm{e}^3}{\mathrm{e}^{\ln b}}=\dfrac{\mathrm{e}^3}{b}$，故 $ab=\mathrm{e}^3$.

答案： e^3

【变式 2】若关于 x 的不等式 $\mathrm{e}^{ax}+\mathrm{e}^{-\ln x}-\sin(\ln x)>\mathrm{e}^{-ax}+\mathrm{e}^{\ln x}-\sin(ax)$ 在区间 $(0,+\infty)$ 上恒成立，则实数 a 的取值范围是（　　）

（A）$(\dfrac{2}{\mathrm{e}},+\infty)$　（B）$(\dfrac{1}{\mathrm{e}},+\infty)$　（C）$(-\infty,\dfrac{1}{\mathrm{e}})$　（D）$(-\infty,\dfrac{2}{\mathrm{e}})$

解析：所给的不等式较复杂，考虑通过同构将其化简，要同构，先把含 a 的和不含 a 的分离到两端，

$\mathrm{e}^{ax}+\mathrm{e}^{-\ln x}-\sin(\ln x)>\mathrm{e}^{-ax}+\mathrm{e}^{\ln x}-\sin(ax)\Leftrightarrow \mathrm{e}^{ax}-\mathrm{e}^{-ax}+\sin(ax)>\mathrm{e}^{\ln x}-\mathrm{e}^{-\ln x}+\sin(\ln x)$ ①，

此时左右两侧已经同构了，可构造函数分析，设 $f(x)=\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x}+\sin x(x\in\mathbf{R})$，则式①即为 $f(ax)>f(\ln x)$，

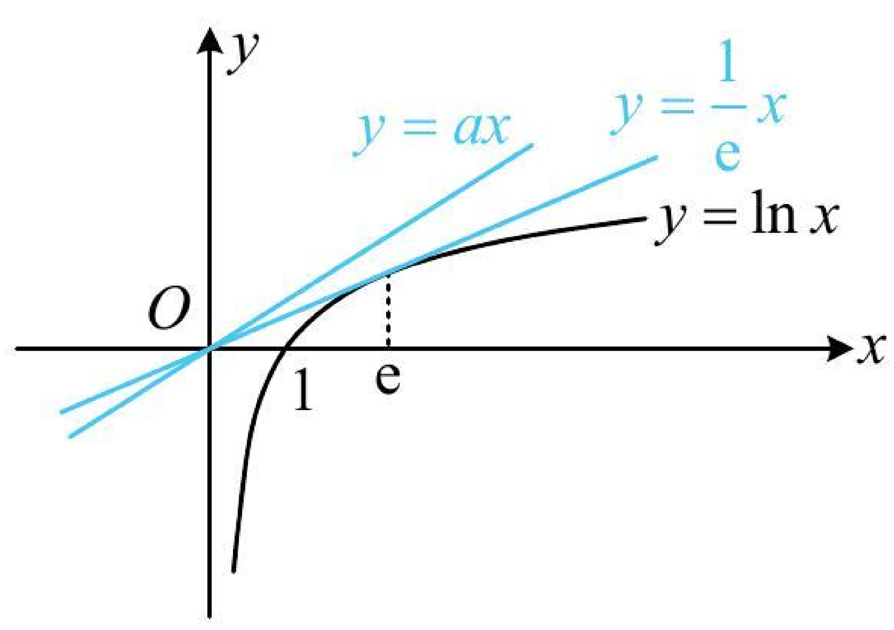
《一数高考数学核心方法》

又 $f'(x)=\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}+\cos x\ge 2\sqrt{\mathrm{e}^x\cdot\mathrm{e}^{-x}}+\cos x=2+\cos x>0$，所以 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上↗，故 $ax>\ln x$，

此不等式画图结合经典切线分析最方便，

如图，注意到 $y=\ln x$ 过原点的切线方程为 $y=\dfrac{1}{\mathrm{e}}x$，所以当且仅当 $a>\dfrac{1}{\mathrm{e}}$ 时，$ax>\ln x$ 恒成立.

答案：B



【反思】同构需要较强的观察能力和代数变形的基本功，操作的方法之一是将参数集中到等式或不等式的一侧，再调整结构.

类型Ⅱ：利用 $x=\mathrm{e}^{\ln x}$ 化局部统一结构换元处理

【例 2】设函数 $f(x)=x\mathrm{e}^x-a(x+\ln x)$，若 $f(x)\ge 0$ 恒成立，则实数 a 的取值范围是（　　）

（A）$[0,\mathrm{e}]$　（B）$[0,1]$　（C）$(-\infty,\mathrm{e}]$　（D）$[\mathrm{e},+\infty)$

解析：若将 xe^x 调整为 $e^{\ln x+x}$，则含 x 的部分都以 $x+\ln x$ 这一整体结构出现，可换元简化不等式，

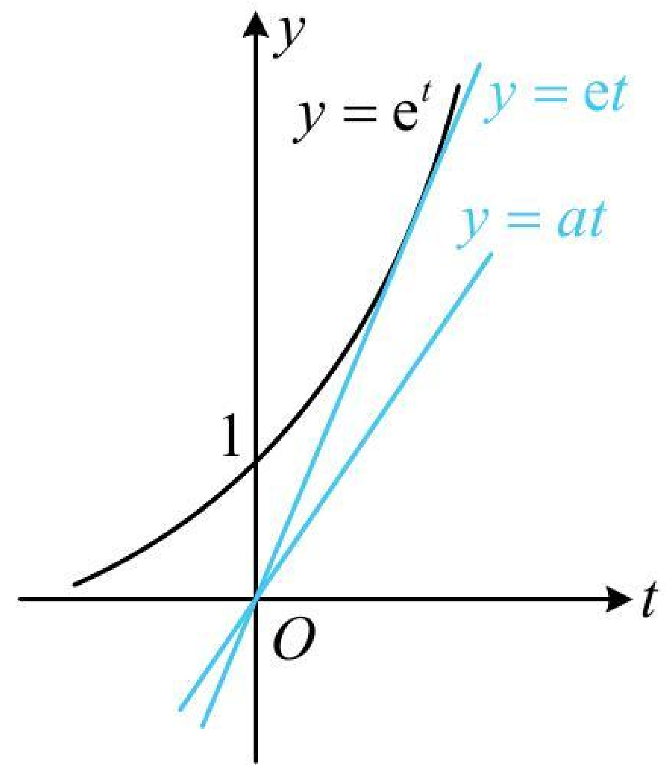
由题意，$f(x)=xe^x-a(x+\ln x)=e^{\ln x}\cdot e^x-a(x+\ln x)=e^{\ln x+x}-a(x+\ln x)$，

设 $t=x+\ln x$，则 $t\in\mathbf{R}$，且 $f(x)=e^t-at$，所以 $f(x)\geq 0$ 即为 $e^t-at\geq 0$，故 $e^t\geq at$，

这一不等式若要全分离，需讨论 t 的正负，比较麻烦，画图结合经典切线来分析更简单，

如图，函数 $y=e^t$ 过原点的切线为 $y=et$，所以当且仅当 $0\leq a\leq e$ 时，$e^t\geq at$ 恒成立.

答案：A



【反思】①从例 2 可以看出，通过恒等式 $x=e^{\ln x}(x>0)$ 可将 $u(x)e^{v(x)}(u(x)>0)$ 化为 $e^{\ln u(x)+v(x)}$，若某等式或不等式的其余部分恰好也是 $\ln u(x)+v(x)$ 这种整体结构，就能换元简化处理；②本题若将解析式改为 $f(x)=x^2e^x-a(x+2\ln x)$，其余不变，你会做吗？一样地，将 x^2e^x 化为 $e^{x+2\ln x}$ 即可.

《一数•高考数学核心方法》

类型III：指对共生式同构

【例 3】若 $e^x\geq\ln(x+a)+a$ 恒成立，则 a 的最大值为_____.

解析：两端同时加 x，可将右侧统一成 $x+a$，运用 e^x+x 与 $x+\ln x$ 的同构方法来同构，

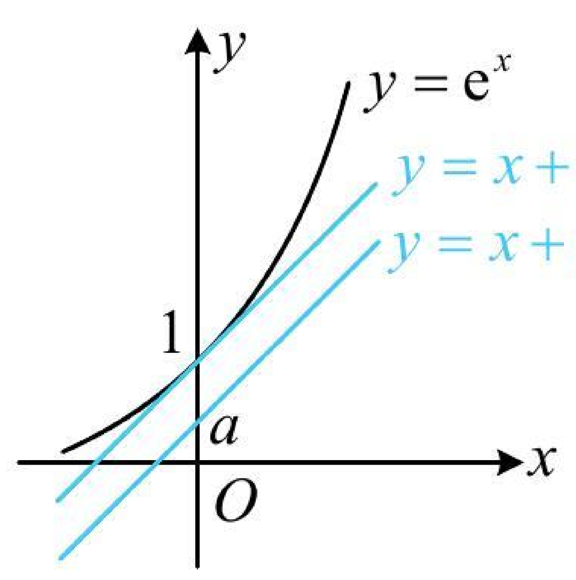
$e^x\geq\ln(x+a)+a\Leftrightarrow e^x+x\geq\ln(x+a)+(x+a)\Leftrightarrow e^x+\ln e^x\geq\ln(x+a)+(x+a)$ ①，

设 $f(x)=\ln x+x(x>0)$，则 $f'(x)=\dfrac{1}{x}+1>0$，所以 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上↗，

不等式①即为 $f(e^x)\geq f(x+a)$，所以 $e^x\geq x+a$，此不等式画图结合经典切线分析最方便，

如图，$y=e^x$ 的斜率为 1 的切线是 $y=x+1$，所以当且仅当 $a\leq 1$ 时，$e^x\geq x+a$ 恒成立，故 a 的最大值为 1.

答案：1



【反思】①基础模型 $e^x\pm x$ 与 $x\pm\ln x$ 之间的同构务必熟悉；②本题对 $e^x+x\geq\ln(x+a)+(x+a)$ 的同构，也可化为左边的形式，即变形成 $e^x+x\geq\ln(x+a)+e^{\ln(x+a)}$，构造函数 $g(x)=e^x+x$ 来分析.

【变式 1】设 $\lambda>0$，若对任意的 $x\in(0,+\infty)$，不等式 $\lambda e^{\lambda x}-\ln x\geq 0$ 恒成立，则 λ 的最小值为_____.

解析： 看到 $\lambda e^{\lambda x}$ 这一结构，想到乘以 x 将前面的系数 λ 调整为与指数部分一致，

$\lambda e^{\lambda x}-\ln x\geq 0\Leftrightarrow \lambda e^{\lambda x}\geq \ln x\Leftrightarrow \lambda x e^{\lambda x}\geq x\ln x$，这样问题就转化成了 xe^{x} 与 $x\ln x$ 同构这一基本模型，

$\lambda x e^{\lambda x}\geq x\ln x\Leftrightarrow \lambda x e^{\lambda x}\geq e^{\ln x}\cdot\ln x$ ①，同构完成了，接下来可构造函数分析，

设 $f(x)=xe^{x}(x\in\mathbf{R})$，则 $f'(x)=(x+1)e^{x}$，所以 $f'(x)>0\Leftrightarrow x>-1$，$f'(x)<0\Leftrightarrow x<-1$，

故 $f(x)$ 在 $(-\infty,-1)$ 上↘，在 $(-1,+\infty)$ 上↗，

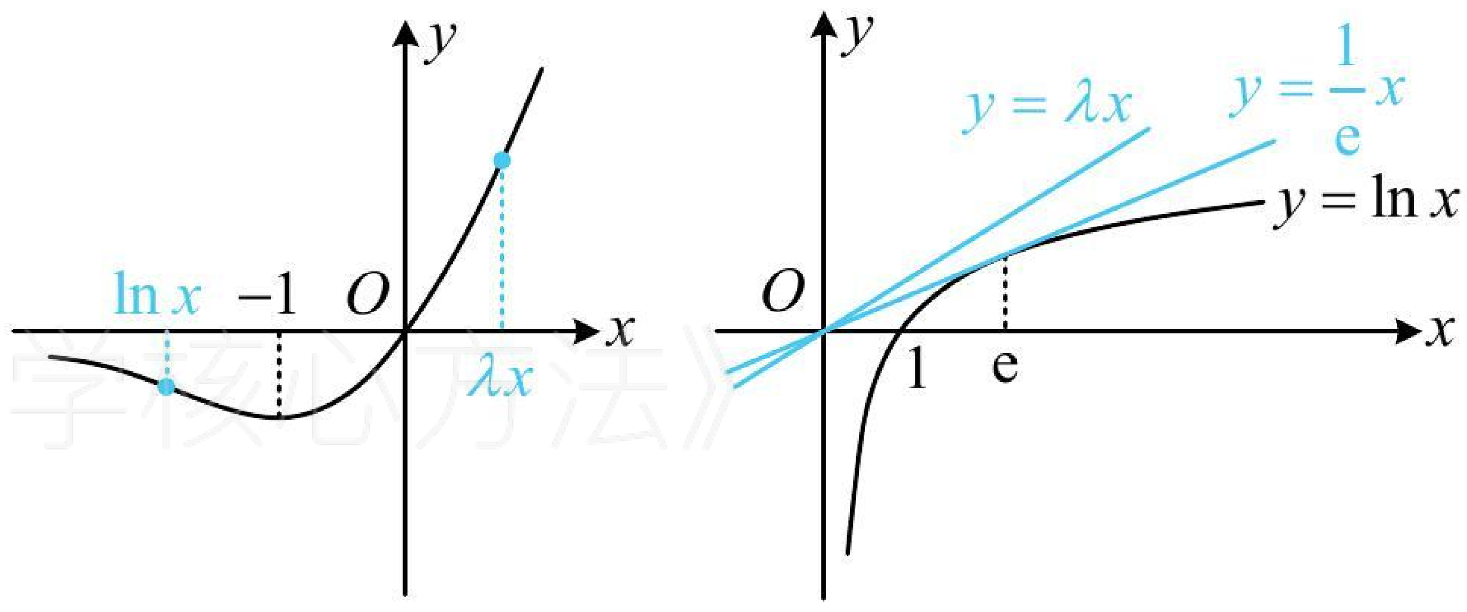
又 $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=0$，$f(-1)=-\dfrac{1}{e}$，$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$，$f(0)=0$，所以 $f(x)$ 的大致图象如图 1，

不等式①即为 $f(\lambda x)\geq f(\ln x)$，由题意，$\lambda x>0$，所以 $f(\lambda x)\geq f(\ln x)\Leftrightarrow \lambda x\geq \ln x$，

这一不等式的处理可以全分离成 $\lambda\geq\dfrac{\ln x}{x}$，对右侧求导研究最值，但更简单的做法是画图分析，

如图 2，注意到 $y=\ln x$ 过原点的切线为 $y=\dfrac{1}{e}x$，所以当且仅当 $\lambda\geq\dfrac{1}{e}$ 时，$\lambda x\geq\ln x$ 恒成立，故 $\lambda_{\min}=\dfrac{1}{e}$.

答案： $\dfrac{1}{e}$



《一数•高考数学核心方法》

图1　　图2

【反思】 例 3 和变式 1 凑同构的操作不同，一个是加 x，一个是乘以 x，但在原不等式中都有线索，比如例 3 的 $\ln(x+a)+a$，变式 1 的 $\lambda e^{\lambda x}$，这些都提示了我们应该如何去凑出像 $\ln x+x$，xe^{x} 这些基本结构.

【变式 2】（2020·新高考Ⅰ卷节选）已知函数 $f(x)=ae^{x-1}-\ln x+\ln a$，若 $f(x)\geq 1$，求 a 的取值范围.

解：（$f(x)$ 的解析式中指对共生，同构是值得尝试的方向，若要同构，我们心中应有基本同构模型，如 $x+e^{x}$ 与 $x+\ln x$ 的同构，xe^{x} 与 $x\ln x$ 的同构，若按 $x+e^{x}$ 与 $x+\ln x$ 的同构来，应先把 $f(x)\geq 1$ 调整为对应的形式，例如 ae^{x-1} 这个部分，a 应调整到指数部分，化为 $e^{\ln a+x-1}$，且应凑出 $e^{\ln a+x-1}+(\ln a+x-1)$ 这种结构，从而变形的方向就有了）

由题意，$f(x)\geq 1\Leftrightarrow ae^{x-1}-\ln x+\ln a\geq 1\Leftrightarrow e^{\ln a+x-1}-\ln x+\ln a\geq 1\Leftrightarrow e^{\ln a+x-1}+(\ln a+x-1)\geq x+\ln x$，

（这样就化为了 $x+e^{x}$ 与 $x+\ln x$ 的同构模型，右侧比较简单，可将右侧调整为左侧的形式）

所以 $e^{\ln a+x-1}+(\ln a+x-1)\geq e^{\ln x}+\ln x$ ①，（左右两侧同构了，可构造函数分析）

设 $h(x)=e^{x}+x(x\in\mathbf{R})$，则 $h'(x)=e^{x}+1>0$，所以 $h(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增，

不等式①即为 $h(\ln a+x-1)\geq h(\ln x)$，所以 $\ln a+x-1\geq\ln x$，故 $\ln a\geq\ln x-x+1$，

设$u(x)=\ln x-x+1(x>0)$，则$u'(x)=\dfrac{1}{x}-1=\dfrac{1-x}{x}$，$u'(x)>0\Leftrightarrow 0<x<1$，$u'(x)<0\Leftrightarrow x>1$，

所以$u(x)$在$(0,1)$上单调递增，在$(1,+\infty)$上单调递减，故$u(x)_{\max}=u(1)=0$，

因为$\ln a\ge u(x)$恒成立，所以$\ln a\ge 0$，从而$a\ge 1$，故实数a的取值范围为$[1,+\infty)$.

【总结】常见的指对同构模型要熟悉，例如$e^x\pm x$与$x\pm\ln x$，xe^x与$x\ln x$，$\dfrac{e^x}{x}$与$\dfrac{x}{\ln x}$等.

强化训练

1.（★★★）已知$x,y\in\mathbf{R}$，若$x+y>\cos x-\cos y$，则下面式子一定成立的是（　　）

（A）$x+y<0$　（B）$x+y>0$　（C）$x-y>0$　（D）$x-y<0$

2.（2022·南平模拟·★★★）对任意的$x_1,x_2\in(1,3]$，当$x_1<x_2$时，$x_1-x_2-\dfrac{a}{3}\ln\dfrac{x_1}{x_2}>0$恒成立，则实数$a$的取值范围是（　　）

（A）$[3,+\infty)$　（B）$(3,+\infty)$　（C）$[9,+\infty)$　（D）$(9,+\infty)$

《一数•高考数学核心方法》

3.（★★★★）已知实数a，b满足$3^a+a=7$，$\log_3\sqrt[3]{3b+1}+b=2$，则$a+3b=$_____.

4.（★★★★）已知函数$f(x)=xe^{x+1}$，$g(x)=k(\ln x+x+1)$，其中$k>0$，设$h(x)=f(x)-g(x)$，若$h(x)\ge 0$恒成立，则k的取值范围是_____.

5.（2022·广州三模·★★★★）若对任意的$x>0$，都有$x^x-ax\ln x\ge 0$，则a的取值范围为（　　）

（A）$[0,e]$　（B）$[-e^{1-\frac{1}{e}},e]$　（C）$(-\infty,-e^{1-\frac{1}{e}}]\cup[e,+\infty)$　（D）$(-\infty,e]$

6．（2022 • 广州模拟 • ★★★★）若不等式 $\ln(mx+1)-x-1>mx-e^x$ 在 $(0,+\infty)$ 上恒成立，则正实数 m 的最大值为_____.

7．（★★★★）已知 $\ln m-\frac{1}{e^m}+2m=0$，则 $me^m=$_____.

《一数•高考数学核心方法》

8．（2022 • T8 联考 • ★★★★）设 a，b 都为正数，e 为自然对数的底数，若 $ae^{a+1}+b<b\ln b$，则（　　）

（A） $ab>e$　　（B） $b>e^{a+1}$　　（C） $ab<e$　　（D） $b<e^{a+1}$

9．（2022 • 成都模拟 • ★★★★）若不等式 $\log_2 x-m\cdot 2^{mx}\le 0$ 对任意的 $x>0$ 都成立，则正实数 m 的取值范围为_____.